概率论与数理统计

吴嘉婧
wujiajing@mail.sysu.edu.cn

中山大学 软件工程学院

教师信息

- 吴嘉婧： 中山大学软件工程学院博导、副教授
- 主要研究方向：区块链、复杂网络、图挖掘等
- 联系方式：wujiajing@mail.sysu.edu.cn
- 助教：郑梓烨 zhengzy39@mail2.sysu.edu.cn
- 微信群：

群聊：2024春季概率统计56节

该二维码7天内(3月3日前)有效，重新进入将更新

教材

- **课堂教材**
  - 《概率论与数理统计》 浙大第五版 盛骤 谢式千 潘承毅 编
- **参考教材**
  - 《概率论与数理统计》（第5版）（影印版 ）高等教育出版社 德沃尔（Devore.J.L.）

研究的**主要内容**

在大量重复试验或观察中随机现象所呈现出的固有规律性，称为随机现象的统计规律性，这正是概率论与数理统计所研究的对象。

- **概率论**：关注随机事件、研究事件发生的可能性：概率的定义；概率分布
- **数理统计**：对大量重复试验中的规律性进行研究：参数估计、随机过程

授课内容

- 第一章 概率论的基本概念
- 第二章 随机变量及其分布
- 第三章 多维随机变量及其分布
- 第四章 随机变量的数字特征
- 第五章 大数定律及中心极限定理
- 第六章 样本及抽样分布
- 第七章 参数估计
- 第八章 假设检验
- *第十二章 随机过程

成绩组成

- 平时作业：15%
- 测验：15%
- 出勤+课堂表现：10%
- 期末：60%

为什么要学概率统计

- 后续课程基础：大数据分析、人工智能、信息论、信号处理等；
- 应用广泛：现代工程、科学、经济等领域应用与研究的重要数学工具。
  - 正如法国数学家拉普拉斯：“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题。”

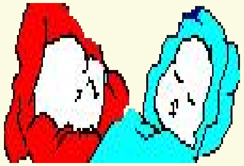
实例 如何确定投资决策方向: 某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元，失败的机会为70%，将损失 2 万元。若存入银行，同期间的利率为5%，问是否作此项投资?

生活中的不确定性

令人着迷的随机游戏：扔硬币、玩扑克、游戏抽卡

自然和经济现象：初生婴儿性别、流星、台风、股票价格、营业收入、比特币出块

生活中的统计学：身边即世界误区、但行好事，莫问前程、塞翁失马，焉知非福



……

不确定性和随机性广泛存在。

1.1 随机试验

基本概念

试验：包括科学实验，对某一事物的某一特征的观察。包括：扔石子，射击，抛硬币的结果。测试灯泡的寿命。

随机试验：1 可以在相同条件下重复进行；2每次试验可出现多种可能结果；3每次试验前能明确试验的所有可能结果，但不能确定试验后会出现哪一个结果.

事件

基本概念

必然事件：在一定的条件S下必然发生的事件。

在重力的作用下，物体的位移随时间变化的函数x(t)，由二阶微分方程 $x''(t) = g$ 来描述，其中g为重力加速度，这是确定的，必然的。

偶然/随机事件：在一定的条件S下可能发生也可能不发生的事件。（大量重复试验中结果具有统计规律）

1.2 样本空间和随机事件

样本空间：某随机试验E的所有可能的结果组成的集合称为E的样本空间，记为S。

样本点：样本空间内的元素，即E的每个结果。

随机事件：满足某一条件的样本空间的子集。

基本事件：由一个样本点组成。
必然事件：S集合本身
不可能事件：空集

事件的关系和运算

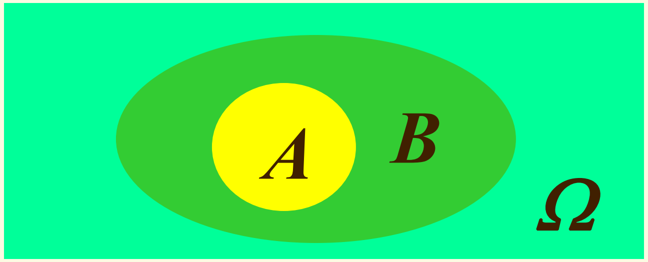
1.包含关系： 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A（或称事件 A 是事件 B 的子事件），记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

相等关系 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等（或称等价），记作 $A = B$.

事件的关系和运算 (Cont.)

实例 “长度不合格”必然导致“产品不合格”所以“产品不合格”包含“长度不合格”.

图示 B 包含 A.

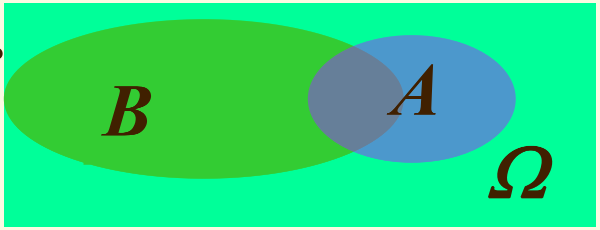


事件的关系和运算 (Cont.)

2. **事件的和** 事件 A、B 至少有一个发生所构成的事件叫做事件 A 与事件 B 的和.记作 $A \cup B$.

实例 若某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,则“产品不合格”是“长度不合格”与“直径不合格”的并.

图示事件 A 与 B 的并.



事件的关系和运算 (Cont.)

3. 事件的积

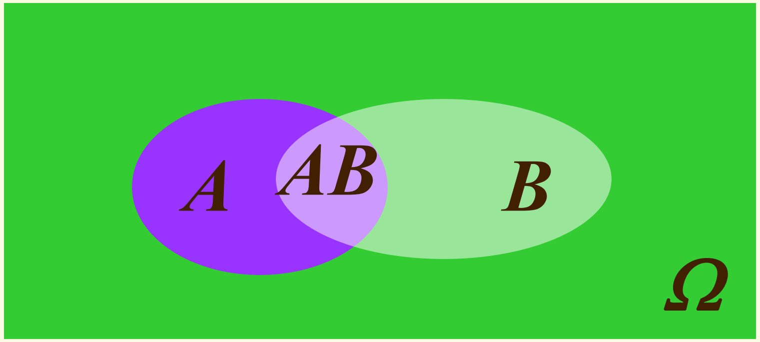
"二事件A,B同时发生"也是一个事件，称为事件A与事件 B的积**事件**，记作$A\cap B$.

积事件也可记作：AB.

事件的关系和运算 (Cont.)

实例 若某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此“产品合格”是“长度合格”与“直径合格”的积事件.

图示事件A与B 的积事件.



事件的关系和运算 (Cont.)

和事件与积事件的运算性质

$$A\cup A=A,\qquad A\cup U=U,\qquad A\cup V=A,$$

$$A\cap A=A,\qquad A\cap U=A,\qquad A\cap V=V.$$

恒用：U表示必然事件，V表示不可能事件

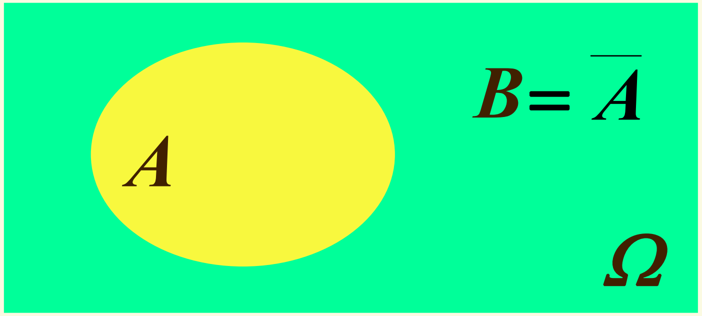
事件的关系和运算 (Cont.)

4. 事件的逆

设A是事件，称“非A”是A的逆/余事件（或对立事件）. 含义是： “非A” 发生当且仅当A不发生。常用 $\overline{A}$ 表示“非A”

实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

图示 A 与 B 的对立.



事件的关系和运算 (Cont.)

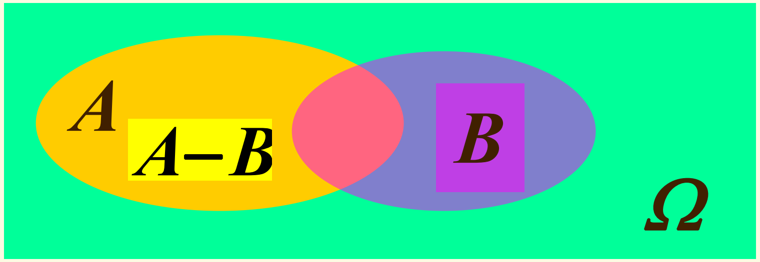
5. 事件的差

事件“A 出现而 B 不出现”，称为事件 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

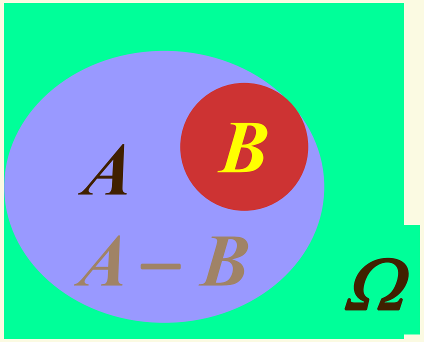
实例 “长度合格但直径不合格”是“长度合格”与“直径合格”的差.

图示 A 与 B 的差

$B \not\subset A$



$B \subset A$



事件的关系和运算 (Cont.)

6. 事件的互不相容（互斥)

若事件 A、B 满足 $A \cap B = AB = V$.

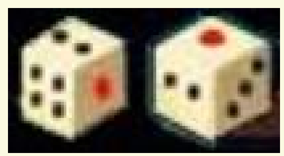
则称事件 A与B互不相容，其中V表示不可能事件.

实例 抛掷一枚硬币,“出现花面”与“出现字面”是互不相容的两个事件.

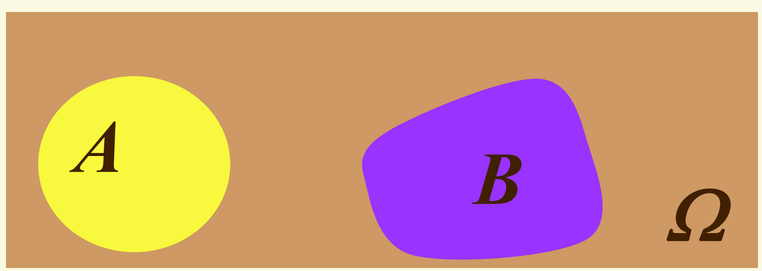
事件的关系和运算 (Cont.)

实例 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数 .

“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ “骰子出现2点”



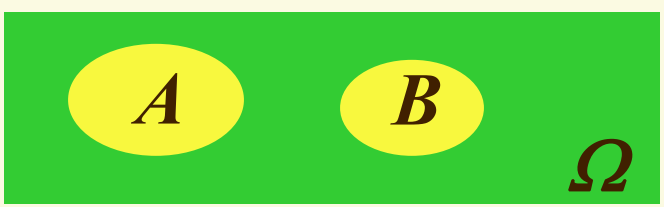
图示 A与B互斥



事件的关系和运算 (Cont.)

对立事件与互斥事件的区别

A、B 互斥　　　　　　　　A、B 对立



$AB=\varnothing$,　　　　　　$A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$.

互　斥 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 对　立

事件的运算规律

设 A, B, C 为事件,则有

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, \ AB = BA.$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$(AB)C = A(BC).$

(3) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = AB \cup AC,$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$$

(4)德摩根律:　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

多个事件的和与积

推广 称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件,即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少发生一个;

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件,即 $A_1, A_2, \cdots$ 至少发生一个.

多个事件的和与积（Cont.）

推广　称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，

即$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生；

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件，

即$A_1, A_2, \cdots$同时发生 .

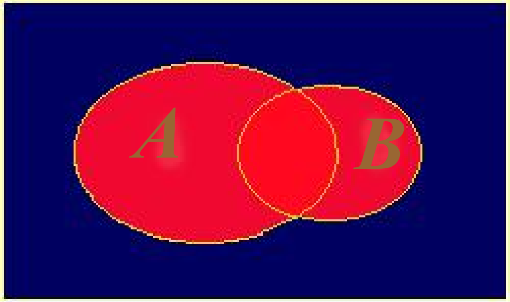
多个事件的和与积的运算规律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

事件的关系及运算图示表示

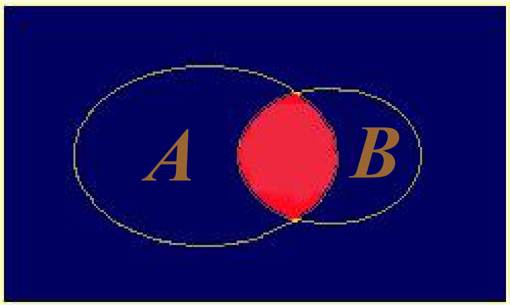
以上事件之间的各种关系及运算可以用下列各种图示来直观地表示.



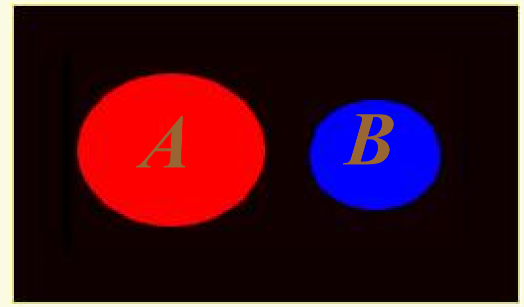
$A \cup B$

$A \subset B$

事件的关系及运算图示表示 (Cont.)

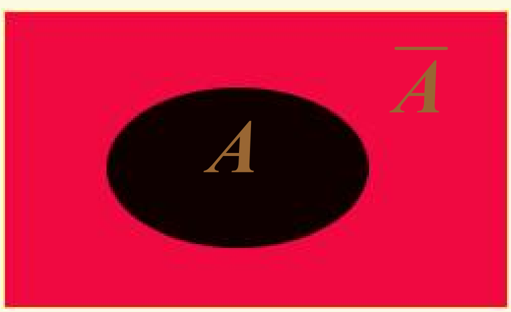


AB

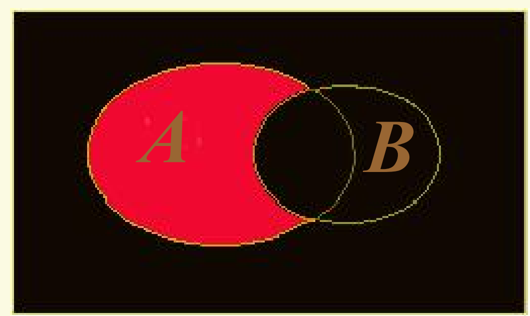


$AB=\phi$

A、B 互斥



对立事件 $\overline{A}$



$A-B=A\overline{B}$

练习

设A,B,C 表示三个随机事件，试将下列事件用A，B，C 表示出来.

(1) A 出现，B、C 不出现；$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$

(2) A, B都出现, C 不出现；$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$

(3) 三个事件都出现；ABC

(4) 三个事件至少有一个出现；$A\cup B\cup C$

(5) 三个事件都不出现；$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(6) 不多于一个事件出现。$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup \overline{A}B\overline{C}\cup \overline{A}\,\overline{B}C$

1.3 频率与概率

若事件A在 n 次试验中发生了m $(0 \le m \le n)$ 次，则量 m/n 称为事件A在n 次试验中发生的**频率**，记作 $f_n(\mathrm{A})$，即：$f_n = \dfrac{m}{n}$.

频率 $f_n(\mathrm{A})$应该具有下述基本性质：

1 $0 \le f_n(\mathrm{A}) \le 1$

2 $f_n(S) = 1$

3 若$A_1, A_2, \cdots A_k$ 是两两不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

频率越大，表示事件A发生越频繁，意味着事件A在一次试验中发生的可能性越大。

1.3 频率与概率 (Cont.)

考虑在相同条件下进行试验

第一轮试验	第二轮试验	…	第S轮试验
试验次数n_1	试验次数n_2	…	试验次数n_s
事件A出现m_1次	事件A出现m_2次	…	事件A出现m_s次

1.3 频率与概率 (Cont.)

概率的公理化定义

如果频率f_n(A)稳定地在某一数值p左右摆动，而且随着实验次数的增多这种摆动的幅度变小，则称：A为随机事件，P(A)=p为随机事件A发生的概率。它满足下列条件：

1 非负性：对任意事件A，有 $P(A) \geq 0$

2 规范性/归一性：对于必然事件，P(S)=1

3 可列可加性

若 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$$

由概率的公理化定义可推得概率的下列性质.

性质1 $P(\varnothing)=0.$

证 令$A_n=\varnothing\ (n=1,2,\cdots)$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$,且$A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j.$

由于上式右端可列个事件两两互斥 ,故由概率公理化定义的可列可加性 ,有

$$P(\varnothing)=P(\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots)$$

$$=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$$

故

$$P(\varnothing)=0.$$

性质2（有限可加性）

设有限个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证　因为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$$

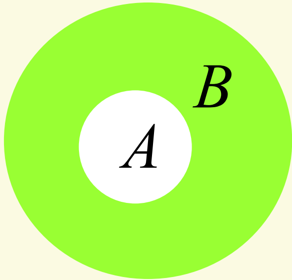
所以由可列可加性及性质 1，有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + 0 + 0 + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \end{aligned}$$

性质3 设A, B为两个事件，且$A \subset B$, 则

$$P(A) \le P(B), \quad P(B-A) = P(B) - P(A).$$

证明 因为 $A \subset B$,



所以 $B = A \cup (B-A)$.

又 $(B-A) \cap A = \varnothing$,

得 $P(B) = P(A) + P(B-A)$.

于是 $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

又因 $P(B-A) \ge 0$, 故 $P(A) \le P(B)$.

性质4（逆事件的概率） 对于事件 A ,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证　因为 $A\cup\overline{A}=S$，且 $A\cap\overline{A}=\varnothing$

所以 $P(A\cup\overline{A})=P(S)=1.$

并且 $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$

由以上两式可得，$P(A)+P(\overline{A})=1$

即

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质5 概率的加法公式： 对于任意两事件A, B有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证 $\because A\cup B=A\cup(B-AB) \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$

又$\because B\supset AB, \therefore P(B-AB)=P(B)-P(AB)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

将上述结论推广：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

1.4 等可能概型（古典概率）

定义

1) 试验的样本空间只包含 有限个样本点；

2) 试验中每个基本事件发 生的可能性相同．

具有以上两个特点的试 验称为古典概型或等可能概型．

古典概型的样本可以表 示为

$$S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$$

其中每一个基本事件发生的概率均为$\dfrac{1}{n}$.

古典概型中事件概率的计算公式

设随机事件由n 个样本点(基本事件)构成，A为其中的任意一个事件，且包含 k个样本点(基本事件)，则事件 A 出现的概率记为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{所包含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

称此为概率的古典定义. 也可记为$P(A)=\dfrac{N(A)}{N(S)}$

古典概率的计算

排列组合是计算古典概率的重要工具

1、乘法原理

乘法原理：若完成一件事情要经过两个步骤，其中第一步中有n_1种不同的方法，第二步骤中有 n_2 种不同的方法，则完成这件事情共有 $n_1 \cdot n_2$ 种方法。

古典概率的计算(Cont.)

2、排列

排列：从n个不同的元素中按顺序取r个排成一列$(0 < r \le n)$称为一个排列。所有可能的排列记为P_n^r。则由乘法原理得

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

特别，当$n = r$时，称该排列为一个全排列，所有全排列的个数为

$$p_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

古典概率的计算(Cont.)

例1　从1,2,3,4,5,6这六个数字中任取五个组成五位数,问共能组成多少个五位数?

解　从六个不同数中任取五个组成五位数,相当于从六个数中任取五个数生成一个排列,因此,所有可能组成五位数共有

$$P_6^5 = 6\times5\times4\times3\times2 = 720\ (\text{个})$$

古典概率的计算(Cont.)

例2　从0,1,2,3,4,5, 这六个数字中任取四个, 问能组成多少个四位偶数?

解　组成的四位数是偶数,要求末位为0,2或4,可先选末位数,共P_3^1 种,前三位数的选取方法 P_5^3 种,而0不能作首位,所以所组成的偶数个数

$$P_3^1 \cdot P_5^3 - P_1^1 \cdot P_2^1 \cdot P_4^2 = 156\,(\text{个})$$

古典概率的计算(Cont.)

3、组合

组合：从n个不同的元素中任取r个元素组成一组 $(0 < r \le n)$, 称为一个组合。所有可能的组合数记为 C_n^r, 由乘法原理，从n个元素中取r个生成的排列可分两步进行，首先从n个元素中取r个组成一组，共有 C_n^r 种方法，然后再在取出的r个元素中进行全排列共有 $r!$ 种方法，从而

古典概率的计算(Cont.)

$$P_n^r = C_n^r \cdot r!$$

所以从n个元素中取r个元素组成的组合数为

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

特别，当$n = r$时，$C_n^n = 1$ 而且 $C_n^r = C_n^{n-r}$。

例 3 从10名战士中选出3名组成一个突击队，问共有多少种组队方法?

解：按组合的定义，组队方法共有

$$C_{10}^3 = 120\text{（种）}。$$

古典概率的计算(Cont.)

例 将一枚硬币抛掷三次.(1) 设事件 A_1 为"恰有一次出现正面",求 $P(A_1)$. (2) 设事件 A_2 为"至少有一次出现正面",求 $P(A_2)$.

解 (1) 设 H 为出现正面,T 为出现反面.

则 $S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$.

而 $A_1=\{HTT, THT, TTH\}$. 得 $P(A_1)=\dfrac{N(A_1)}{N(S)}=\dfrac{3}{8}$.

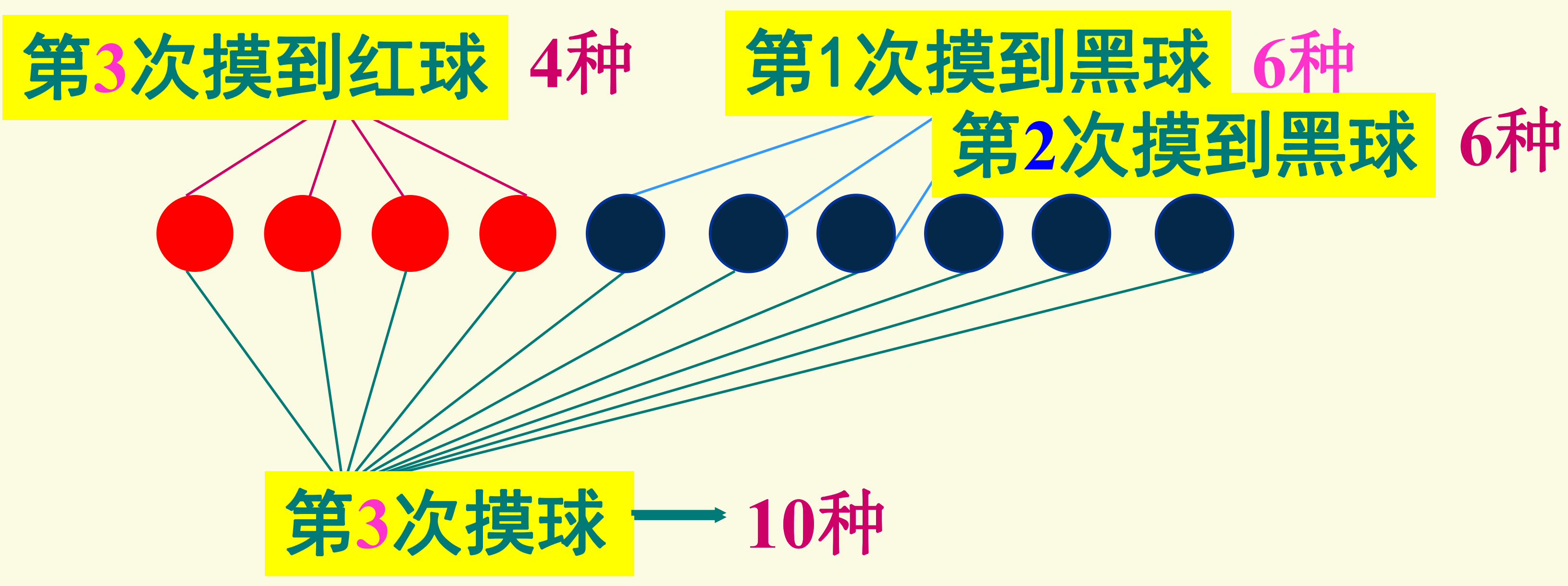
(2) $A_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$.

因此 $P(A_2)=\dfrac{N(A_2)}{N(S)}=\dfrac{7}{8}$.

古典概率的计算(Cont.)

问题 设袋中有4只红球和6只黑球,现从袋中有放回地摸球3次,求前2 次摸到黑球、第3 次摸到红球的概率.

解 设 $A=\{$前2次摸到黑球,第三次摸到红球$\}$



古典概率的计算(Cont.)

样本点总数为 $10\times10\times10=10^3,$

A 所包含样本点的个数为 $6\times6\times4,$

故 $P(A)=\dfrac{6\times6\times4}{10^3}=0.144.$

例 设有 n 个小球,每个都等可能地落入 N 个格子中 $(n \le N)$,试求下列事件的概率:

(1) $A = \{$某指定的 n 个格子中各有一球$\}$;

(2) $B = \{$任意的 n 个格子中各有一球$\}$.

解 n 个球都等可能地落入到 N 个格子中,应有 N^n 种可能的方法,所以基本事件总数为 N^n.

事件 A 所含的基本事件数为 $n!$

事件 B 所含的基本事件数为 $C_N^n n!$

故 $P(A) = \dfrac{n!}{N^n}$, $P(B) = \dfrac{C_N^n n!}{N^n}$.

几何概率

定义

1) 试验的样本空间包含无 限个样本点；

2) 试验中每个基本事件发 生的可能性相同 .

具有以上两个特点的试 验称为几何概型

几何概型和古典概型的主要区别在于:

1）试验的结果是无限个。

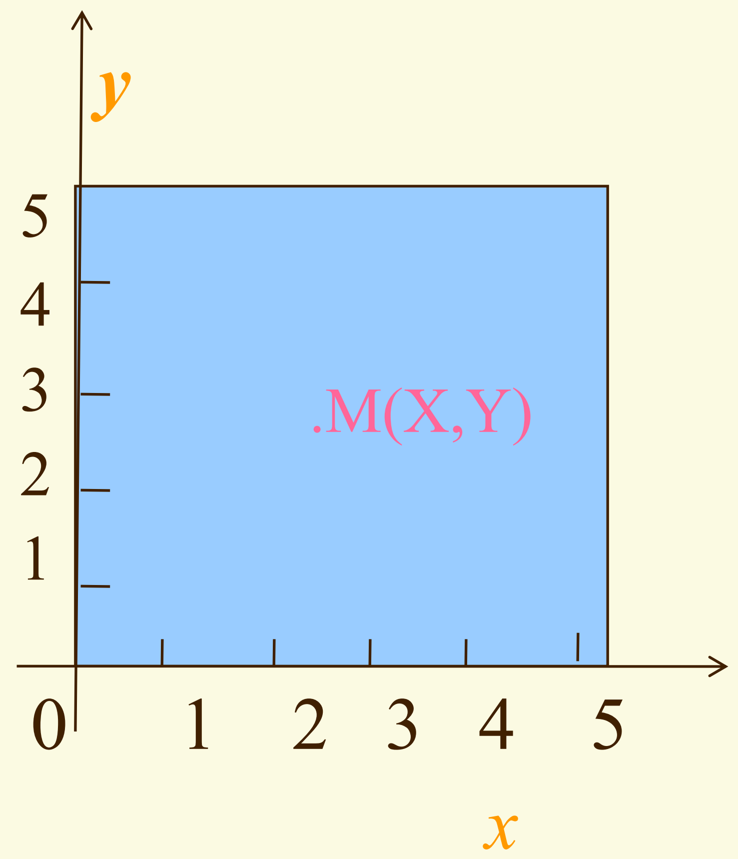
2）每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积或度数)成比例

几何概率

例 (会面问题）甲、乙二人约定在 0 点到 5 点之间在某地会面，先到者等一个小时后即离去设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的，且二人互不影响。求二人能会面的概率。

几何概率 (Cont.)

解： 以 X, Y 分别表示甲乙二人到达的时刻，于是 $0 \le X \le 5,\ 0 \le Y \le 5.$



即 点 M 落在图中的阴影部分。所有的点构成一个正方形，即有无穷多个结果。

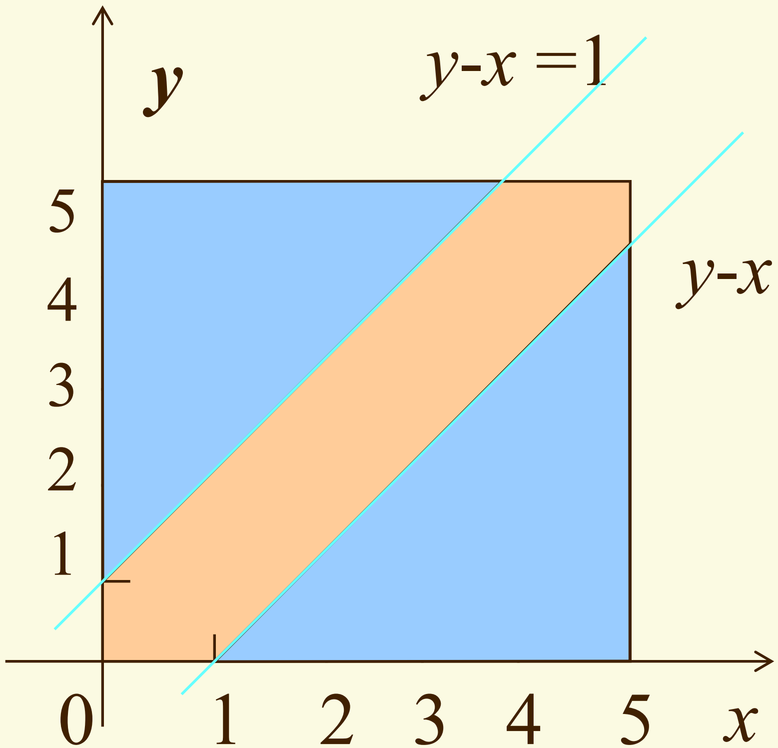
由于每人在任一时刻到达都是等可能的，所以落在正方形内各点是等可能的。

几何概率 (Cont.)

二人会面的条件是：$|X-Y|\le 1,$

$$p=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}$$

$$=\frac{25-2\times\frac{1}{2}\times 4^2}{25}=\frac{9}{25}.$$



几何概率 (Cont.)

定义 当随机试验的样本空间是某个区域,并且任意一点落在度量 (长度, 面积, 体积) 相同的子区域是等可能的,则事件 A 的概率可定义为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

(其中$m(\Omega)$是样本空间的度量,$m(A)$是构成事件 A 的子区域的度量) 这样借助于几何上的度量来合理规定的概率称为几何概率.

概率的公理化定义与性质

S是任意的非空集合，称为基本事件空间(或样本空间)

定义：

设S是样本空间，事件A是样本空间中的一个样本，定义一个实数$p = P(A)$，若$p = P(\bullet)$的定义域和函数P满足下列条件：

概率的公理化定义与性质(Cont.)

(1) $P(A) \geq 0$ (一切A); 非负性

(2) $P(S) = 1$; 规范性

(3) 若A_n (一切$n \geq 1$),且两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$ 可列可加性

则称P是F上的概率测度(简称概率)，$P(A)$为A发生的概率.

概率的公理化定义与性质(Cont.)

由概率的公理化定义可推得概率的下列性质.

性质1 $P(\varnothing)=0$.

证 $A_n=\varnothing\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j.$

由于上式右端可列个事件两两互斥,故由概率公理化定义的可列可加性,有

$$P(\varnothing)=P(\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots)$$
$$=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$$

再由概率的非负性可得,

$$P(\varnothing)=0.$$

概率的公理化定义与性质(Cont.)

性质 2　对于事件 A,有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

证　因为

$$A \cup \overline{A} = \Omega \text{ ,且 } A\overline{A} = \varnothing \text{ .}$$

所以　$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1.$

并且　$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

由以上两式可得，$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

即　$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

概率的公理化定义与性质(Cont.)

性质3　设有限个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证　因为

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots$$

所以由可列可加性及性质1，有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + 0 + 0 + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

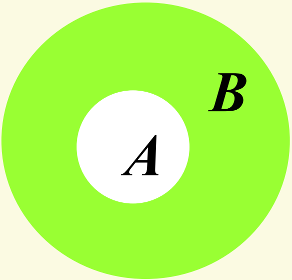
概率的公理化定义与性质(Cont.)

性质4 **设** A, B **为两个事件,且** $A \subset B$,**则**

$$P(A) \le P(B), \quad P(B-A) = P(B) - P(A).$$

证明 因为 $A \subset B$,

所以 $B = A \cup (B - A)$.



又 $(B-A) \cap A = \varnothing$,

得 $P(B) = P(A) + P(B-A)$.

于是 $\boxed{P(B-A) = P(B) - P(A).}$

又因 $P(B-A) \ge 0$, 故 $P(A) \le P(B)$.

概率的公理化定义与性质(Cont.)

例 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 求在下列三种情况下 $P(B\overline{A})$ 的值.

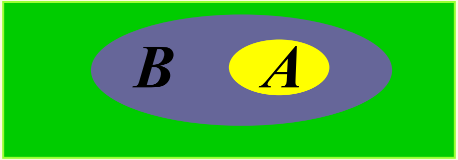
$(1)\ A \subset B;\ (2)\ P(AB)=\frac{1}{8}.$

解

(1) 由图示得

$$P(B\overline{A}) = P(B-A)$$

$$= P(B)-P(A) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$



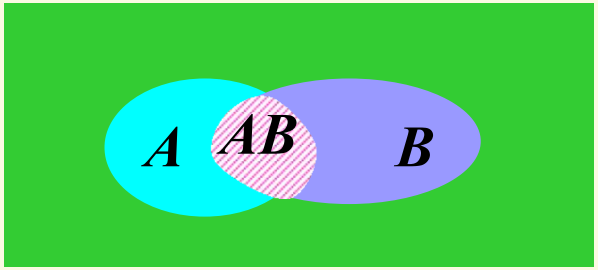
概率的公理化定义与性质(Cont.)

(2)由图示得

$$B\overline{A} = B - A = B - AB$$

且 $AB \subset B$

因而 $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}.$



1.5 条件概率与独立性

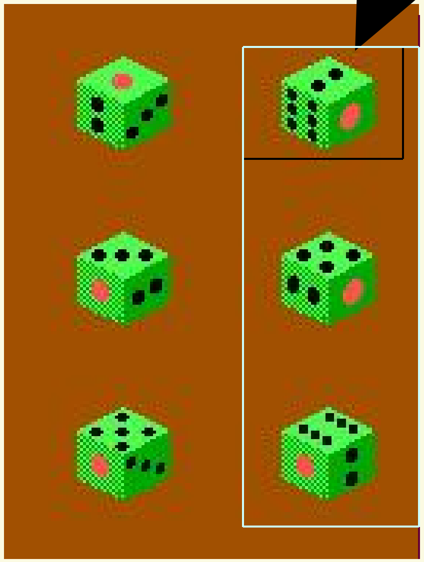
条件概率是概率论中一个重要而实用的概念。它所考虑的是事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率。

例：掷一颗均匀骰子，

A={掷出2点}， B={掷出偶数点}， $P(A|B)$=？

解：掷一颗均匀骰子可能的结果有6种，且它们的出现是等可能的。

掷骰子



$$P(A)=1/6$$

由于已知事件B已经发生，所以此时试验所有可能结果只有3种，而事件A包含的基本事件只占其中一种，故有

$$P(A|B)=1/3$$

条件概率

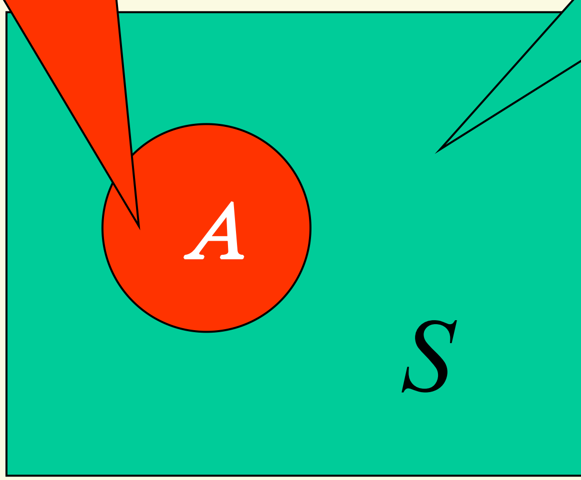
上例中　$P(A|B) \neq P(A)$

它们不相等的原因在于“事件B已发生”这个新条件改变了样本空间.

以几何概型为例

其中封闭曲线围成的一切点的集合表示事件 A

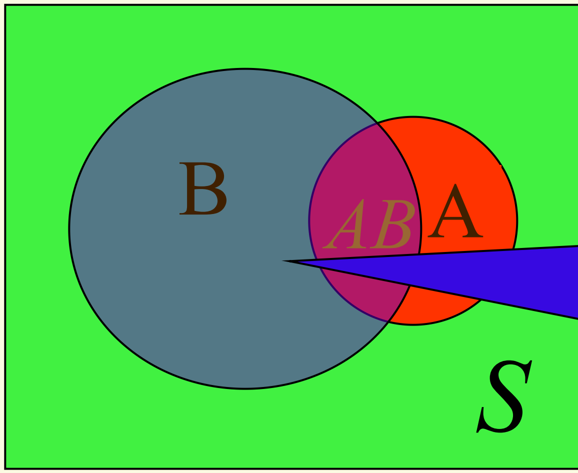
设边长为1个单位的正方形的面积表示样本空间



把图形的面积理解为相应事件的概率

则 P(A)= A的面积/ S的面积 ＝A的面积

当已知B发生的情况下，由原来的S缩减为B



如果B发生，那么使得A发生当且仅当样本点属于AB，因此P(A|B)应为P(AB)在P(B)中的“比重”

P(A|B)=AB的面积/B的面积

这就好象给了我们一个“情报”，使我们得以在某个缩小了的范围内来考虑问题.

条件概率(Cont.)

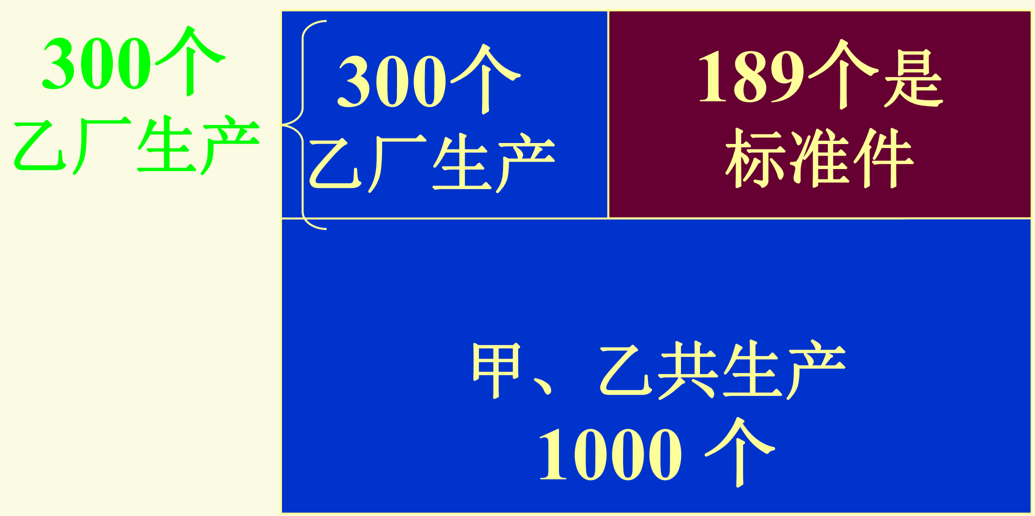
注意$P(AB)$与$P(A \mid B)$的区别！

条件概率(Cont.)

例 甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中 300件是乙厂生产的. 而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少？

设B={零件是乙厂生产}，A={是标准件}

所求为$P(AB)$.



条件概率(Cont.)

若改为“发现它是乙厂生产的,问它是标准件的概率是多少?”

求的是 $P(A|B)$.

B发生,
在$P(AB)$中作为结果;
在$P(A|B)$中作为条件.

条件概率的计算

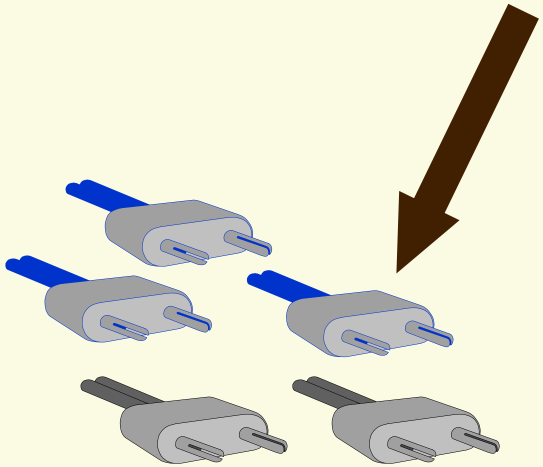
设 A, B 为两个事件, $P(B) > 0$, 则称 $P(AB)/P(B)$ 为在事件 B 发生的条件下事件A发生的条件概率.

记作 $$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率

例：一个盒子装有5只产品，其中有3只一等品，2只二等品.

从中取产品两次，每次任取一只，做不放回抽样. 设



A={第一次取到的是一等品}

B={第二次取到的是一等品}

试求条件概率 P(B | A).

条件概率(Cont.)

解法一：在原来的样本空间中，直接由条件概率的定义计算：

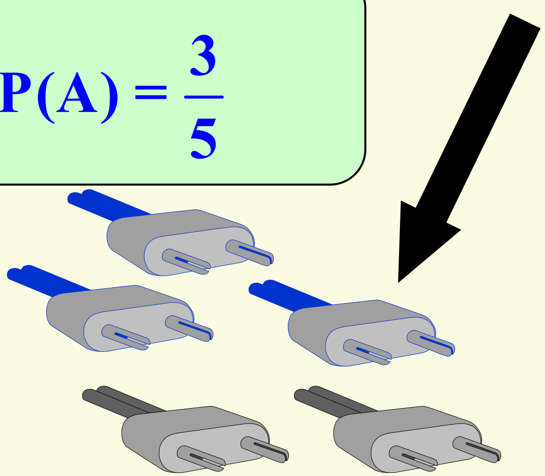
AB={第一、第二次都取得一等品}

$$P(AB)=\frac{3\times 2}{5\times 4}=\frac{3}{10}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A)=\frac{3}{5}$$

$$=\frac{1}{2}$$

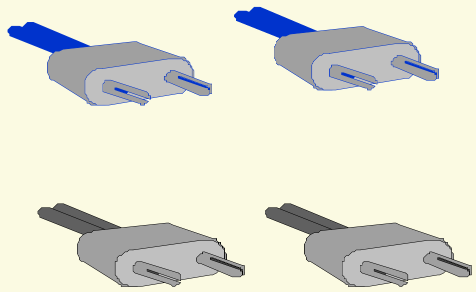


条件概率(Cont.)

解法二：在缩减后的样本空间A上计算.

由于事件A已经发生，即第一次取到的是一等品，所以第二次取产品时，所有产品只有4只，而其中一等品只剩下2只，故

$$P(B \mid A) = \frac{1}{2}$$



条件概率的性质

(1) 有界性: $0 \le P(A|B) \le 1;$

(2)规范性 $P(B|B)=1, \quad P(\Phi \mid B)=0$

(3) 可加可列性: 设 $A_1, A_2, \cdots,$ 是两两不相容的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

乘法公式

由条件概率的定义：

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

若已知$P(B)$, $P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$.

乘法定理

设A，B是两个事件，若$P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \qquad (1)$$

若$P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \qquad (2)$$

(1)和(2)式都称为乘法公式，利用它们可计算两个事件同时发生的概率

乘法定理(Cont.)

推广：$$P(ABC) = P(A)\,P(B \mid A)\,P(C \mid AB)$$

$$(P(AB) > 0)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0)$$

乘法定理(Cont.)

例：n 件产品中有 m 件废品，任取两件

求它们都是废品的概率？

解：现在记 $A=\{$第一件为废品$\}$，$B=\{$第二件为废品$\}$.

那么

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{m}{n}\frac{m-1}{n-1}$$

乘法定理(Cont.)

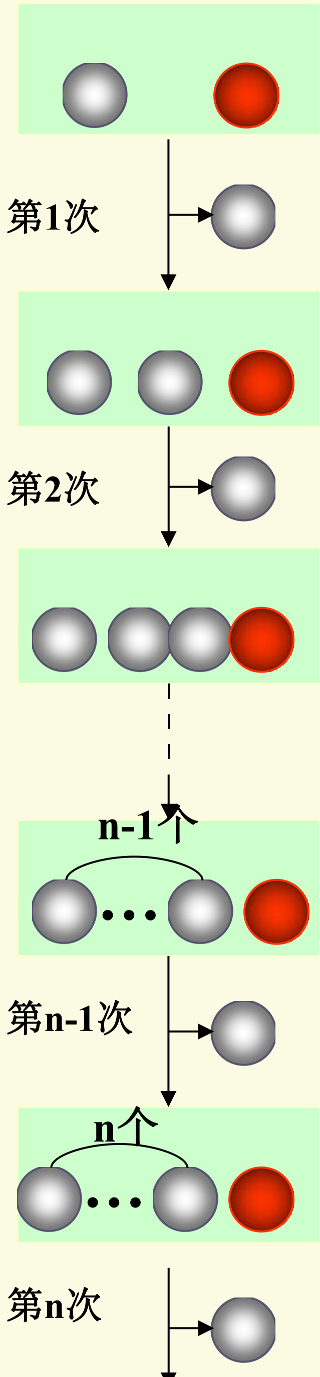
例：袋中有一个白球及一个红球，一次次地从袋中取球，如果取出白球，则除把白球放回再加进一个白球，直至取出红球为止.求取了n次都没有取到红球的概率.

解：记

A_i＝{第i次取得白球}， i＝1, 2, …, n

A={取了n次都没有取到红球}

则 $$A = A_1 A_2 \cdots A_n$$



第一次取得白球

$$P(A_1)=\frac{1}{2}$$

第一次取得白球的条件下，第二次取得白球的概率

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{2}{3}$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\,P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})\,P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

前n-2次取得白球的条件下，第n-1次取得白球

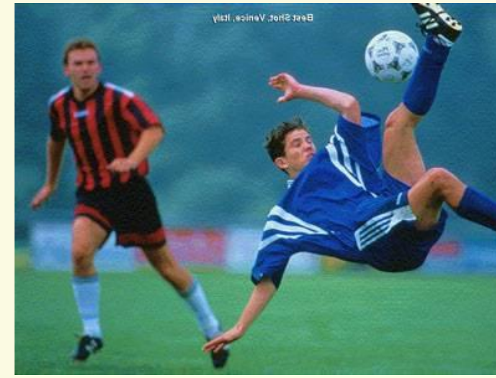
$$P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})=\frac{n-1}{n}$$

前n-1次取得白球的条件下，第n次取得白球

$$P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})=\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

一场精彩的足球赛将要举行, 5个球迷好不容易才搞到一张入场券.大家都想去,只好用抽签的方法来解决.

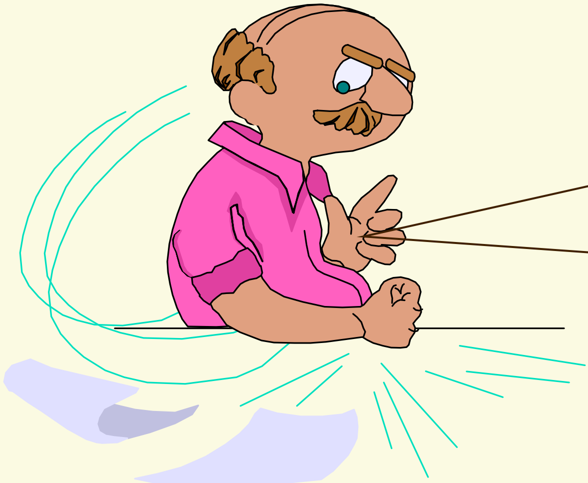


入场券

5张同样的卡片,只有一张上写有“入场券”,其余的什么也没写. 将它们放在一起,让5个人依次抽取.

“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大.”

后抽比先抽的确实吃亏吗?



“大家不必争先恐后，你们一个一个按次序来，谁抽到‘入场券’的机会都一样大.”

到底谁说的对呢？让我们用概率论的知识来计算一下,每个人抽到“入场券”的概率到底有多大?

“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大。”

我们用A_i表示“第i个人抽到入场券”i＝1,2,3,4,5.

则 $\overline{A_i}$ 表示“第i个人未抽到入场券”

显然，$P(A_1)=1/5$，$P(\overline{A_1})=4/5$

也就是说，第1个人抽到入场券的概率是1/5.

由于 $A_2 = \overline{A}_1 A_2$

因为若第2个人抽到了入场券，第1个人肯定没抽到.

由乘法公式

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)$$

也就是要想第2个人抽到入场券，必须第1个人未抽到，计算得：

$$P(A_2) = (4/5)(1/4) = 1/5$$

同理，第3个人要抽到“入场券”，必须第1、第2个人都没有抽到．因此

$$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=(4/5)(3/4)(1/3)=1/5$$

继续做下去就会发现，每个人抽到“入场券”的概率都是1/5.

这就是有关抽签顺序问题的正确解答.

也就是说，抽签不必争先恐后.

全概公式和逆概公式

概率论的重要研究课题之一是希望从已知的简单事件的概率推算出未知的复杂的事件概率.

为达到这个目的，经常把一个复杂事件分解成若干个不相容的简单事件之和，通过计算简单事件的概率，最后利用概率的可加性得到最终结果.

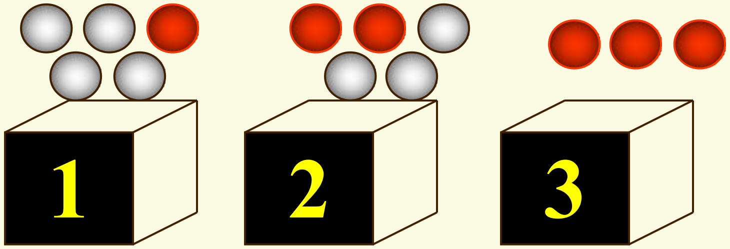
看一个例子:

有三个箱子,分别编号为1,2,3。1号箱装有1个红球4个白球,2号箱装有2红3白球 , 3号箱装有3 红球. 某人从三箱中任取一箱,从中任意摸出一球,求取得红球的概率.

解 记 A_i={球取自i号箱},

i=1,2,3;

B ={取得红球}



其中 A_1、A_2、A_3两两互斥

B发生总是伴随着A_1，A_2，A_3 之一同时发生，

即 $B=A_1B+A_2B+A_3B$,

且 A_1B、A_2B、A_3B 两两互斥

运用加法公式得到

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$$

对求和中的每一项运用乘法公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

代入数据计算得：$P(B)=8/15$

将此例中所用的方法推广到一般的情形，就得到在概率计算中常用的全概率公式.

全概公式

如果事件组 $B_1, \quad B_2, \quad \cdots, \quad B_n$ 满足：

$(1).\ B_1, \quad B_2, \quad \cdots, \quad B_n$ 两两互不相容；

$(2).\ P(B_i) > 0 \ \left(i = 1, \quad 2, \quad \cdots \right)$

$(3).\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \mathrm{S}$

即：$\mathrm{B}_1 \bigcup B_2 \bigcup \cdots \bigcup B_n$是必然事件，

则对任意事件A,有：$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$

全概公式(Cont.)

证明　因为 $A = AS = A\left(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n\right)$

$$= AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_n$$

并且 $AB_i \cap AB_j = \varphi, (i \neq j)$,所以

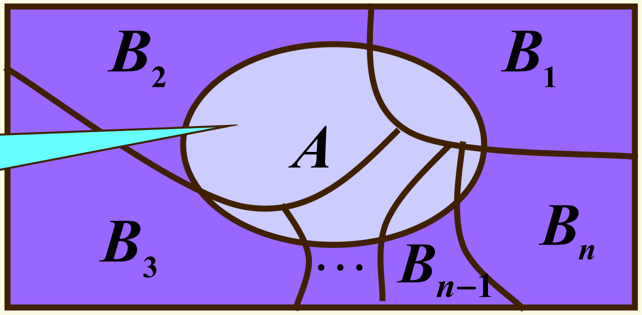
$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n)$$

$$= P(B_1)P(A \mid B_1) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

全概公式(Cont.)

化整为零
各个击破



它可以将一个复杂事件的概率计算问题,分解为若干个简单事件的概率计算问题,最后应用概率的可加性求出最终结果.

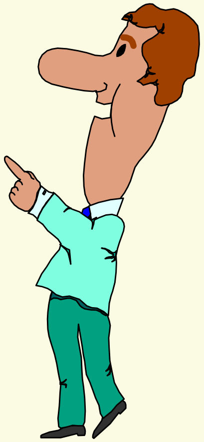
全概公式(Cont.)

我们还可以从另一个角度去理解全概率公式：

某一事件A的发生有各种可能的原因$B_i(i=1,2,\ldots,n)$,如果A是由原因B_i所引起，则A发生的概率是

$$P(AB_i)=P(A|B_i)P(B_i)$$

每一原因B_i都可能导致A发生，故A发生的概率是各原因引起A发生概率的总和，即全概率公式.



$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

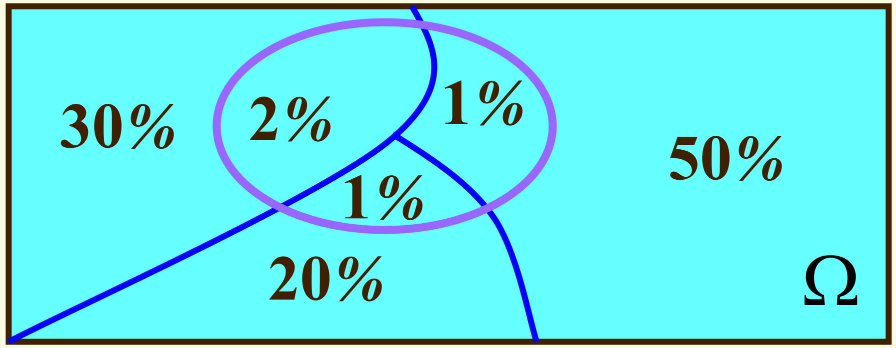
全概公式(Cont.)

例 有一批同一型号的产品,已知其中由一厂生产的占 30% , 二厂生产的占 50% , 三厂生产的占 20%, 又知这三个厂的产品次品率分别为2% , 1%, 1%,问从这批产品中任取一件是次品的概率是多少?

解 设事件 A 为“任取一件为次品”,

事件 B_i 为"任取一件为 i 厂的产品", $i = 1,2,3.$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega, \quad B_i B_j = \varnothing, \quad i, j = 1,2,3.$$



由全概率公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3).$$

$$P(B_1)=0.3,\ \ P(B_2)=0.5,\ \ P(B_3)=0.2,$$

$$P(A|B_1)=0.02,\ P(A|B_2)=0.01,\ P(A|B_3)=0.01,$$

故 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$

$$=0.02\times 0.3+0.01\times 0.5+0.01\times 0.2=0.013.$$

例　甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为0.4、0.5、0.7. 飞 机被一人击中而击落的概率为0.2,被两人击中而击落的概率为0.6, 若三人都击中, 飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解　　设A={飞机被击落}

B_i={飞机被i人击中}, i=1,2,3

则　$A=B_1A+B_2A+B_3A$

依题意，

$P(A|B_1)=0.2$,

$P(A|B_2)=0.6$,

$P(A|B_3)=1$

由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

为求$P(B_i)$，

设 H_i={飞机被第i人击中}，i=1,2,3

可求得

$$P(B_1)=P\left(H_1\overline{H_2}\,\overline{H_3}\cup\overline{H_1}H_2\overline{H_3}\cup\overline{H_1}\,\overline{H_2}H_3\right)$$

$$P(B_2)=P\left(H_1H_2\overline{H_3}\cup\overline{H_1}H_2H_3\cup H_1\overline{H_2}H_3\right)$$

$$P(B_3)=P\left(H_1H_2H_3\right)$$

将数据代入计算得

$$P(B_1)=0.36;P(B_2)=0.41;P(B_3)=0.14.$$

于是

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+P(B_3)P(A\mid B_3)$$

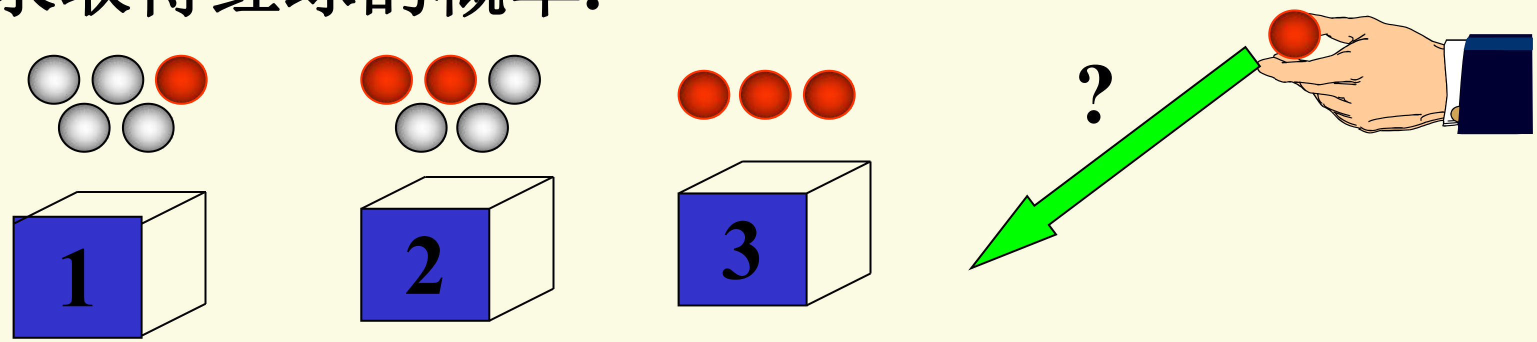
$$=0.36\times 0.2+0.41\times 0.6+0.14\times 1$$

$$=0.458$$

即飞机被击落的概率为0.458.

逆概公式贝叶斯公式

例：有三个箱子，分别编号为1,2,3，1号箱装有1个红球4个白球，2号箱装有2红3白球，3号箱装有3红球. 某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，求取得红球的概率.

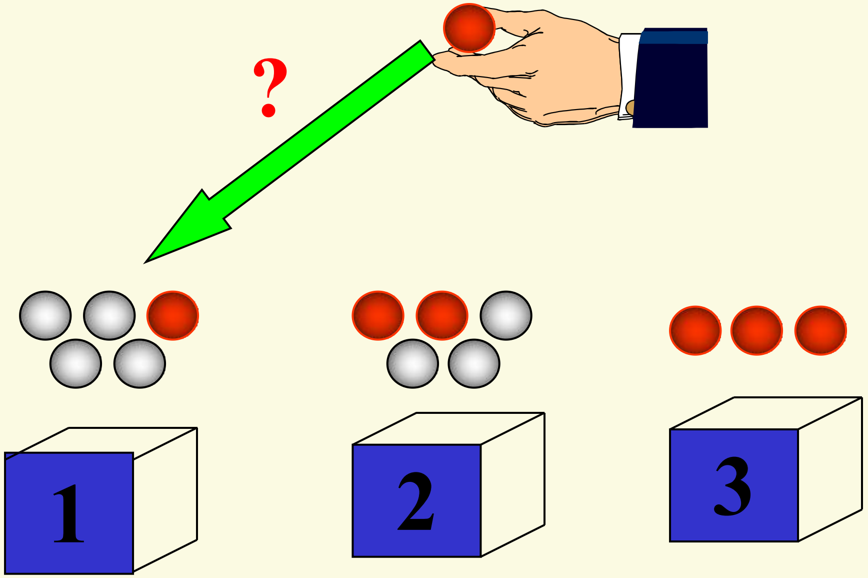


解：记 A_i={球取自i号箱}，i=1,2,3；B ={取得红球}

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=8/15$$

实际中还有下面一类问题，是“已知结果求原因”

某人从任一箱中任意摸出一球，发现是红球,求该球是取自1号箱的概率.



这一类问题在实际中更为常见，它所求的是条件概率$P(A_1|B)$，是已知某结果发生条件下，求各原因发生可能性大小.

贝叶斯公式

如果事件组 $B_1, \quad B_2, \quad \cdots, \quad B_n$ 满足：

(1). $B_1, \quad B_2, \quad \cdots, \quad B_n$ 两两互不相容；

(2). $P(B_i) > 0 \ (i = 1, \quad 2, \quad \cdots)$

(3). $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$

即：$B_1 \bigcup B_2 \bigcup \cdots \bigcup B_n$是必然事件，

则对任意事件A,如果$P(A) > 0$,则

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)},$$

贝叶斯公式(Cont.)

例 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的,且无区别的标志.

(1) 在仓库中随机地取一只元件,求它是次品的概率;

贝叶斯公式(Cont.)

(2) 在仓库中随机地取一只 元件,若已知取到的是次品,为分析此次品出自何厂 ,求此次品出由三家工厂生产的概率分 别是多少.

解 设 A 表示 "取到的是一只次品", B_i $(i = 1,2,3)$

表示 "所取到的产品是由第 i 家工厂提供的".

则 B_1, B_2, B_3 是样本空间 S的一个划分,

且 $P(B_1) = 0.15, \quad P(B_2) = 0.80, \quad P(B_3) = 0.05,$

贝叶斯公式(Cont.)

$$P(A|B_1)=0.02,\quad P(A|B_2)=0.01,\quad P(A|B_3)=0.03.$$

(1) 由全概率公式得

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$

$$=0.0125.$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times0.15}{0.0125}=0.24.$$

贝叶斯公式(Cont.)

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=0.64,$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=0.12.$$

故这只次品来自第 2 家工厂的可能性最大 .

例：假定用血清甲胎蛋白法诊断肝癌．记

C= {被检验者患有肝癌}

A= {用血清甲胎蛋白法诊断为阳性}

已知 $P(A|C)=0.95$， $P(\bar{A}|\bar{C})=0.90$， 设某一地区有肝癌的概率$P(C)=0.0004$.

现在若有一人检查呈阳性，求此人为肝癌患者的概率有多大？即求$P(C|A)=$？

解：由贝叶斯公式，可得

$$P(C \mid A) = \frac{P(C)P(A \mid C)}{P(C)P(A \mid C) + P(\bar{C})P(A \mid \bar{C})}$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C)$$

$$P(A \mid \bar{C}) = 1 - P(\bar{A} \mid \bar{C})$$

$$= \frac{0.0004 \times 0.95}{0.0004 \times 0.95 + 0.9996 \times 0.1}$$

$$= 0.0038$$

现在来分析一下结果的意义.

1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义?

如果不做试验，抽查一人，他是患者的概率 $P(C)=0.0004$

患者阳性反应的概率是0.95，若试验后得阳性反应，则根据试验得来的信息，此人是患者的概率为 $P(C\mid A)=0.0038$

从0.0004增加到0.0038，将近增加约10倍.

说明这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有意义.

2. 检出阳性是否一定患有癌症?

试验结果为阳性,此人确患癌症的概率为

$$P(C \mid A)=0.0038$$

即使检出阳性，尚可不必过早下结论有癌症，此时医生常要通过再试验来确认.

贝叶斯公式

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)},$$

P*(*B*$_i$)** (i***=**1,2,…,*n***) 是在没有进一步信息（不知道事件*A*是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识.

贝叶斯公式(Cont.)

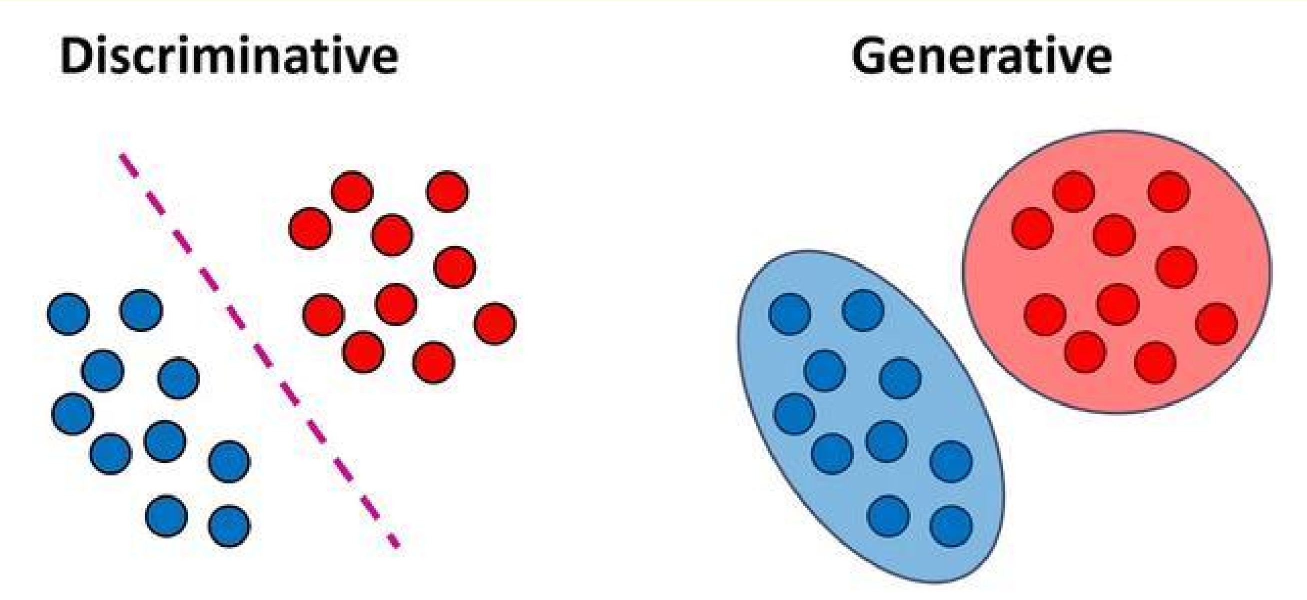
当有了新的信息（知道A发生），人们对诸事件发生可能性大小$P(B_i \mid A)$有了新的估计.

贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化

$P(B_k)$ —— 先验概率

$P(B_k \mid A)$ —— 后验概率

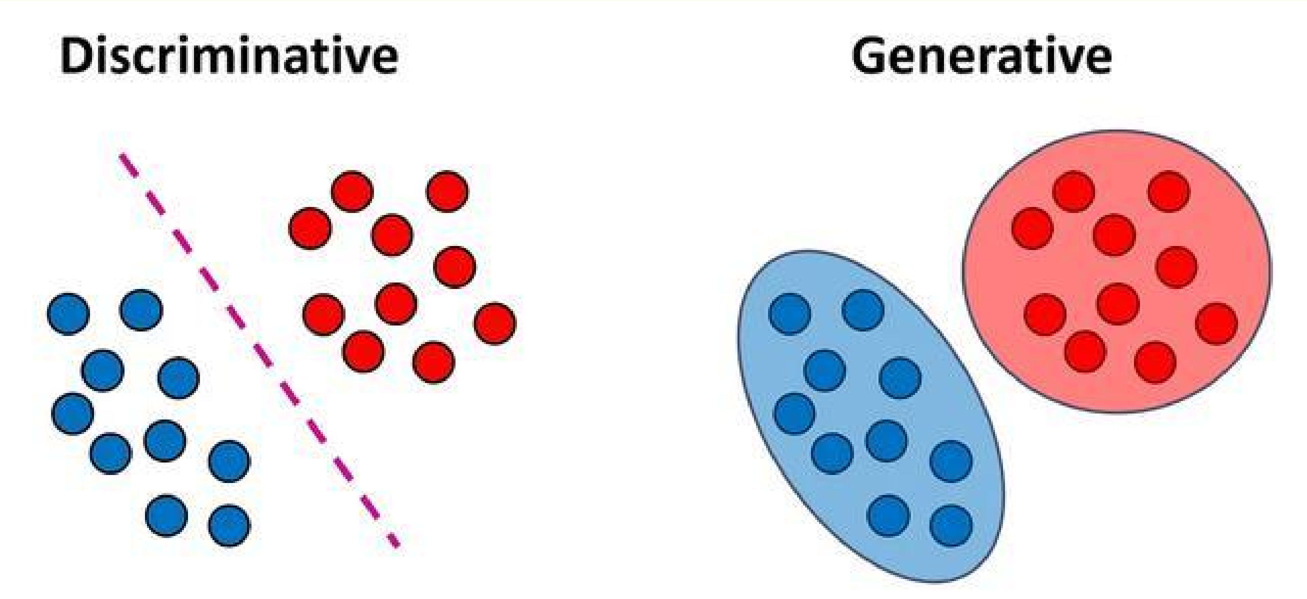
判别模型和生成模型



判别模型：直接学习决策函数 $Y=f(X)$ 或条件概率$P(Y|X)$，寻找一个决策边界，将样本划分对应类别

典型：k近邻、感知机、决策树、逻辑回归、支持向量机等

判别模型和生成模型



生成模型：由数据学习联合概率密度分布$P(XY)$，然后求出条件概率分布$P(Y|X)$, 学习了每个类别的边界，它包含了更多信息，可以用来生成样本

典型：朴素贝叶斯，隐马尔可夫模型

事件的独立性

例 已知袋中有5只红球, 3只白球. 从袋中有放回地取球两次,每次取1球. 设第 i 次取得白球为事件 A_i (i =1, 2) . 求

$$P(A_1),\quad P(A_2),\quad P(A_2|A_1),\quad P(A_2|\overline{A_1}),$$

解 $P(A_1)=3/8=P(A_2)$, $\quad P(A_2|\overline{A_1})=3/8$,

$P(A_2|A_1)=3/8$,

$$\Longrightarrow\quad P(A_2|A_1)=P(A_2)=P(A_2|\overline{A_1})$$

事件的独立性(Cont.)

事件 A_1 发生与否对 A_2 发生的概率没有影响可视为事件A_1与A_2相互独立

定义 设 A , B 为两事件，若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A 与事件 B 相互 **独立**

事件的独立性(Cont.)

定理： 四对事件 $A,B;\ A,\overline{B};\ \overline{A},B;\ \overline{A},\overline{B}$

任何一对相互独立, 则其它三对也相互独立

试证其一 $A,\overline{B}$ 独立 $\Rightarrow A,B$ 独立

事实上

$$P(AB)=P(A-A\overline{B})=P(A)-P(A\overline{B})$$

$$=P(A)-P(A)P(\overline{B})$$

$$=P(A)\left(1-P(\overline{B})\right)=P(A)P(B)$$

定义 三事件 A, B, C 相互独立是指下面的关系式同时成立：

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases} \qquad (1)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \qquad (2)$$

注：1) 关系式(1) (2)不能互相推出

2)仅满足(1)式时,称 A, B, C 两两独立

A, B, C 相互独立 $\Rightarrow$ A, B, C 两两独立

例 随机投掷编号为 1 与 2 的两个骰子事件 A 表示1号骰子向上一面出现奇数,B 表示2号骰子向上一面出现奇数,C 表示两骰子出现的点数之和为奇数.

则 $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$

$$P(AB)=P(BC)=P(CA)=1/4$$
$$=P(A)P(B)=P(B)P(C)=P(C)P(A)$$

但 $P(ABC)=0\neq 1/8=P(A)P(B)P(C)$

本例说明: 不能由 A, B, C 两两独立

$\longrightarrow$ A, B, C 相互独立

事件的独立性(Cont.)

定义 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立是指下面的关系式同时成立

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),\ 1 \le i < j \le n$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ 1 \le i < j < k \le n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

事件的独立性(Cont.)

例：某型号火炮的命中率为0.8，现有一架敌机即将入侵，如果欲以99.9 % 的概率击中它，则需配备此型号火炮多少门?

事件的独立性(Cont.)

设需配备 n 门此型号火炮

设事件 A_i 表示第 i 门火炮击中敌机

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \left[1 - P(A_i)\right]^n = 1 - 0.2^n > 0.999$$

$$n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.2} \approx 4.29$$

故需配备 5 门此型号火炮 .

作业

Exes. 3， 7, 20, 23, 34

小结

- 基本概念
- 概率定义

■ 计算

- 直接计算
  - 古典概型、几何概率 → 等可能性
    - $$P(A)=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点总数}}$$
    - $$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}$$
- 推 算
  - 条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$
  - 利用独立性 $P(AB)=P(A)P(B)$
  - 重要公式
    - 乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ $(P(A)>0)$
    - 全概率公式 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$
    - Bayes公式

$$P(B_i|A)=P(B_i)P(A|B_i)\Big/\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)$$

小结

基本概念

随机实验
- 可在相同条件下重复进行；
- 每次试验可出现多种可能结果；
- 每次试验前能明确试验的所有可能结果，但不能确定试验后会出现哪一个结果.

试验的每个可能的结果

随机事件
- 基本事件 —— 不能再分解
- 复合事件 —— 多于一个的基本事件构成

- 必然事件 $P(S)=1$，反之不真！
- 不可能事件 $P(\varPhi)=0$，反之不真！

样本空间 —— 所有基本事件构成的集合

事件的关系及运算 —— 四种关系和三种运算

概率

定义 ——
(1) $0 \le P(A) \le 1$;
(2) $P(S)=1$;
(3) 两两互不相容事件$A_1,\cdots,A_n,\cdots$有 $P(\sum A_i)=\sum P(A_i)$.

性质

1^0 $P(\varPhi)=0$;

2^0 若事件 $A_1,\cdots,A_n$两两互不相容, 则$P(\sum A_i)=\sum P(A_i)$;

3^0 对任意事件A, B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

4^0 对任一事件A， 有 $P(A)=1- P(A)$;

5^0 设 A, B是两个事件，且 $B\subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B),\ P(B)\le P(A),$$

关系

包含

相等

互斥 $AB=\Phi$ 两两互不相容

互逆 $AB=\Phi$，$\boxed{A\cup B=\Omega}$

运算

和 $A\cup B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$.

积 $A\cap B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$.

差 $A-B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 且 } \omega\notin B\}$.

交换律——和、积

结合律——和、积

分配律——积关于和，和关于积

对偶律——和、积

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$